Computerphysik WS 2015/2016

Prof. Dr. Roland Netz, FU Berlin

Übungsblatt 9: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Markus Miettinen, Julian Kappler

10. Dezember 2015

Allgemeine Hinweise

Abgabetermin für die Lösungen ist

- **Sonntag, 20.12., 24:00 Uhr.**

Aufgabe 8.1: Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung - Bevölkerungswachstum (10 Punkte)

Der englische Pfarrer und Ökonom Thomas Malthus[1] beobachtete Ende des 18. Jahrhunderts, dass die Bevölkerungszahl N einer Nation ungefähr proportional zu ihrer Größe wächst,

$$\dot{N} = \alpha N, \tag{1}$$

wobei der Punkt eine Zeitableitung bedeutet und $\alpha = \beta - \delta$ die Wachstumsrate ist, mit $\beta \geq 0$ der Geburtenrate und $\delta \geq 0$ der Sterberate.

Falls die Geburtenrate größer ist als die Sterberate, $\beta > \delta$, ist $\alpha > 0$ und die Bevölkerungszahl wächst, während die Bevölkerungszahl für $\beta < \delta$ abnimmt. Da diese Theorie die Begrenztheit von Ressourcen nicht berücksichtigt, führt der Fall $\alpha > 0$ zu einem exponentiellen Wachstum der Bevölkerungszahl, $N(t) = N_0 \exp(\alpha t)$, einer sogenannten Malthusianische Katastrophe[2].

Falls wir wie der belgische Arzt und Mathematiker Pierre Verhulst[3] die Endlichkeit von Ressourcen berücksichtigen, indem wir eine sogenannte Tragfähigkeit des Lebensraumes $N^\star$ (maximale Bevölkerungsanzahl) einführen, erhalten wir eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) \left(N^\star - N(t)\right). \tag{2}$$

In diesem Modell führt der Fall $\alpha > 0$ nicht zu einer unendlich wachsenden Bevölkerungszahl. Gleichung (2) hat die analytische Lösung

$$N(t) = \frac{N_0 N^\star e^{\alpha N^\star t}}{N^\star - N_0(1 - e^{\alpha N^\star t})}. \tag{3}$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Thomas_Robert_Malthus
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Malthusianische_Katastrophe
[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Fran%C3%A7ois_Verhulst

Im Folgenden sollen Sie drei verschiedene Methoden implementieren, um beliebige eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Jede Methode sollte als Funktion implementiert werden, die als Eingabeparameter die Differentialgleichung (d.h. die Funktion $F(t,x(t))$ sodass $\dot{x}(t) = F(t,x(t))$), die Anfangs- und Endpunkte $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 100$, den Diskretisierungsschritt $h = 1$ und eine Anfangsbedingung $x(t_{\min}) = 1$ hat. Die hier gegebenen Werte sollen die Standardwerte für Ihre Funktionen sein. Für jede der Methoden sollte die Lösung der Gleichung (2) mit den gegebenen Standardparametern sowie $\alpha = 0.0025$, $N^\star = 50$ geplottet werden.

- **9.1.1 (2 Punkte):** Implementieren Sie die Euler-Methode.
- **9.1.2 (2 Punkte):** Implementieren Sie die modifizierte Euler-Methode.

  Hinweis: Die modifizierte Euler-Methode (zweistufige Runge-Kutta Methode) ist gegeben durch folgende Rekursionsformel:

  $$x_{n+1} = x_n + hK_2, \tag{4}$$

  wobei x_i der Wert am i-ten Zeitschritt ist und

  $$\begin{aligned} K_1 &= F(t_n,\, x_n) && (5)\\ K_2 &= F(t_n + \frac{h}{2},\, x_n + \frac{h}{2}K_1) && (6)\\ & && (7) \end{aligned}$$

- **9.1.3 (2 Punkte):** Implementieren Sie die klassische vierstufige Runge-Kutta Methode.

  Hinweis: Das klassische vierstufige Runge-Kutta Verfahren basiert auf der folgenden Rekursionsformel:

  $$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \tag{8}$$

  wobei

  $$\begin{aligned} K_1 &= F(t_n,\, x_n) && (9)\\ K_2 &= F(t_n + \frac{h}{2},\, x_n + \frac{h}{2}K_1) && (10)\\ K_3 &= F(t_n + \frac{h}{2},\, x_n + \frac{h}{2}K_2) && (11)\\ K_4 &= F(t_n + h,\, x_n + hK_3). && (12) \end{aligned}$$

- **9.1.4 (2 Punkte):** Nun wollen wir die Genauigkeiten dieser drei Methoden untersuchen, indem wir die numerischen Ergebnisse mit der exakten Lösung, Gleichung (3), vergleichen. Lösen Sie dazu Gleichung (2) für die Diskretisierungsschritte $h = 10^1$, 10^0, .., 10^{-5}, mit den anderen Parametern wie oben gegeben. Stellen Sie für jede Methode den maximalen absolution Fehler (verglichen mit der analytischen Lösung) in einem doppellogarithmischen Graphen als Funktion von h dar.

  Für jede Methode sollte der Fehler proportional zu h^ξ skalieren; Welche Methode liefert welches ξ? Erreicht man mit einer der Methoden die Maschinengenauigkeit?

- **9.1.5 (2 Punkte):** Wir nehmen nun an, die Wachstumsrate sei zeitabhängig, $\alpha(t) = \alpha^\star \cos(\omega t)$, wobei $\alpha^\star = 0.01$ und $\omega = 0.04\pi$. Motiviert wird dies dadurch, dass die Sterberate im Winter höher ist, während die Geburtenrate im Sommer höher ist. In diesem Fall ist keine analytische Lösung für Gleichung (2) bekannt, die numerischen Methoden sind jedoch nach wie vor verfügbar.

  Lösen sie die modifizierte Gleichung (2) mit der Runge-Kutta Methode. Benutzen Sie die oben gegebenen Parameter und Anfangspopulationen $N_0 \in \{\ 49.5,\ 25.0,\ 0.5\}$. Stellen Sie Ihre drei Lösungen als Funktionen der Zeit in einem gemeinsamen Graphen dar und interpretieren Sie ihre Ergebnisse[4].

  Hinweis: Um das Verhalten des Systems besser zu verstehen, ist es möglicherweise sinnvoll, auch die Funktion $\alpha(t)$ in denselben Graphen zu plotten.

Aufgabe 9.2: Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung - Van der Pol Oszillator (10 Punkte)

In den 1920er Jahren beobachtete der niederländische Physiker Balthasar van der Pol bei Experimenten an Vakuumröhren nicht-sinusförmige Spannungsoszillationen. Um diese zu beschreiben verwendete er die Gleichung

$$\ddot{y} = \mu(1 - y^2)\dot{y} - y, \tag{13}$$

wobei die Punkte jeweils Zeitableitungen bedeuten und $\mu \geq 0$ die Stärke des "nichtlinearen Dämpfungsterms" angibt. Im dieser Aufgabe betrachten wir diesen, über Gleichung (13) definierten, sogenannten Van der Pol (VdP) Oszillator.

- **9.2.1 (2 Punkte):** Welche Gleichung ergibt sich für $\mu = 0$? Angenommen $\mu > 0$, für welche Werte von y wirkt der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (13), $\mu(1 - y^2)\dot{y}$, dämpfend? Für welche y wirkt er beschleunigend?

Jede gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in eine n-dimensionale Differentialgleichung erster Ordnung überführt werden, indem die Ableitungen $\dot{y}$, $\ddot{y}$,... bis zur $(n-1)$-ten Ordnung als unabhängige Variablen interpretiert werden. In unserem Beispiel bedeutet dies, dass wir

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \tag{14}$$

und die Gleichung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}\,(t,\vec{x}(t)) \tag{15}$$

betrachten.

- **9.2.2 (2 Punkte):** Benutzen Sie Gleichung (13), um die Funktion $\vec{F}$ für den VdP Oszillator herzuleiten.

- **9.2.3 (2 Punkte):** Implementieren Sie nun das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung zur numerischen Lösung von Gleichung (15).

  Hinweis: Für k-dimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung werden x_i, K_i, F in Gleichungen (8-12) zu Vektoren. Ihre Funktion sollte als Argumente die Funktion $\vec{F}$, Anfangs- sowie Endzeiten $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 60$ der numerischen Lösung, den Zeitdiskretisierungsschritt $h = 0.01$ sowie eine Anfangsbedingung $\vec{x}(t_{\min})$ haben. Die hier gegebenen Werte

[4] Wenn Sie möchten, können Sie die Lösungen auch nochmal mit der Euler-Methode berechnen und sich die dabei resultierenden Ergebnisse ansehen. Dies ist freiwillig und wird nicht bepunktet, könnte aber interessant sein.

sollen Standardwerte sein. Rückgabewerte sollten Arrays mit Zeiten t_i und zugehörigen Koordinaten $\vec{x}(t_i)$ sein.

- **9.2.4 (2 Punkte):** Lösen Sie die Bewegungsgleichung des VdP Oszillators mithilfe des Runge-Kutta Verfahrens für $\mu \in \{0, 0.5, 5\}$ und jeweils den Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(t_{\min}) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t_{\min}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

  Stellen Sie die beiden Trajektorien, die Sie für jedes μ erhalten, jeweils in einem gemeinsamen Phasenraumportrait und einem gemeinsamen Graphen für $y(t)$ dar.

  Hinweis: Verwenden Sie für alle anderen Parameter die in 9.2.3 gegebenen Standardwerte. Mit Phasenraumportrait ist gemeint, dass die Lösungen $\vec{x}(t)$ als Kurven in einer Ebene mit Achsen y, $\dot{y}$ dargestellt werden soll. Sie sollten hier 6 Graphen generieren, in denen jeweils zwei Kurven sind.

- **9.2.5 (2 Punkte):** Interpretieren Sie ihre Ergebnisse aus 9.2.4:

  - Wie unterscheiden sich die Ergebnisse für $\mu = 0$ von den Ergebnissen für $\mu > 0$?
  - Für welche Werte von μ nähern sich die Trajektorien im Phasenraum einem Grenzzyklus an? Falls die Trajektorien sich einem Grenzzyklus annähern, welchen Einfluss hat die Anfangsbedingung auf die Trajektorie $y(t)$ für große Zeiten t?

  Hinweis: Ein "Grenzzyklus" meint hier eine geschlossene Kurve im Phasenraum, an die sich Trajektorien $\vec{x}(t)$ für große Zeiten t annähern.