Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 12
Kanonische Transformationen

Abgabe bis: 15.07.2022 um 12:00 Uhr

Aufgabe 1: Kanonische Transformationen und Satz von Liouville

Betrachten Sie die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \tag{1}$$

(a) Definieren Sie neue Koordinaten Q und P:

$$Q = q\sqrt{\omega} \quad , \quad P = p/\sqrt{\omega} \tag{2}$$

und zeigen Sie, dass dies eine kanonische Transformation ist.

(b) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion als Funktion von Q und P um. Stellen Sie die hamiltonschen Bewegungsgleichunen auf und lösen Sie das Gleichungssystem für allgemeine Anfangsbedingungen $Q(0) = Q_0$ und $P(0) = P_0$.

(c) Betrachten Sie ein Rechteck $ABCD$ im Phasenraum mit Eckpunkten $(Q_A, P_A) = (1, 0)$, $(Q_B, P_B) = (2, 0)$, $(Q_C, P_C) = (2, 1)$ und $(Q_D, P_D) = (1, 1)$. Finden Sie die Abbildung des Rechtecks zu einem späteren Zeitpunkt t. *Hinweis: Zeigen Sie, dass in den neuen Koordinaten, die Zeitentwicklung im Phasenraum einer Rotation um den Ursprung entspricht.* Zeigen Sie, dass die Fläche des Rechtecks durch die Zeitentwicklung nicht verändert wird und erkären Sie, warum das aufgrund des Satzes von Liouville auch im Allgemeinen zu erwarten ist. Wäre das immer noch der Fall, wenn ω in (**??**) eine zeitabhängige Funktion wäre?

Lösung: Solutions on following page—

Solutions to ex 1:

$$Q = q\sqrt{\omega} \rightarrow q = \frac{Q}{\sqrt{\omega}}$$
$$P = \frac{p}{\sqrt{\omega}} \qquad p = P\sqrt{\omega}$$

a) Different methods.

#1: explicitly check that $\{f,g\}$ is preserved $\forall f, g$:

$$\{f,g\}_{Q,P} := \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial Q}$$

$\frac{\partial}{\partial P} = \frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial}{\partial p} = \sqrt{\omega}\frac{\partial}{\partial p}$

and similarly $\frac{\partial}{\partial Q} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial}{\partial q}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\sqrt{\omega}\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \left(\sqrt{\omega}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial g}{\partial q}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = \{f,g\} \qquad \checkmark$$

#2: check the Poisson brackets for Q, P.

Thm: A transformation $q_i p_j \rightarrow Q_j, P_j$ preserves all Poisson brackets if and only if

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \ ; \quad \{P_i, P_j\} = 0 ; \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} .$$

Here it suffices to check that $\{Q,P\} = 1$:

$$\{Q,P\} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial q}}_{\sqrt{\omega}}\underbrace{\frac{\partial P}{\partial p}}_{\frac{1}{\sqrt{\omega}}} - \cancel{\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}} = 1 \qquad \checkmark$$

#3: Check that the transformation preserves the form of Hamilton's equations.

⚠ There are different definitions of canonical transformations, with some subtle differences. Some sources define a canonical transformation as preserving the form of Hamilton's eqs, which does not imply the definition of a canonical transf. given in the lecture.

In the old coordinates: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega}\,\frac{dq}{dt} \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega}\,\frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial P} \\ -\frac{\partial H}{\partial Q} \end{pmatrix}$$

→ Hamilton's eqs. for Q, P

→ the form of Hamilton's equations is preserved (<u>for any</u> H)

b) $H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 = \frac{\omega}{2}\left(P^2 + Q^2\right)$

Hamilton's equations $\longrightarrow$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega P \quad (\mathrm{I}) \qquad \text{and} \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\omega Q \, . \quad (\mathrm{II})$$

Eliminating P, we find $\frac{d^2}{dt^2} Q \overset{(\mathrm{I})}{=} \omega \frac{dP}{dt} \overset{(\mathrm{II})}{=} -\omega^2 Q$.

$\longrightarrow$ general solution is $Q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Then $P \overset{(\mathrm{I})}{=} \frac{1}{\omega}\frac{dQ}{dt} = -A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$.

Initial conditions are $Q(0) = Q_0$ and $P(0) = P_0$ $\longrightarrow$

$$Q_0 = A \quad , \quad P_0 = B$$

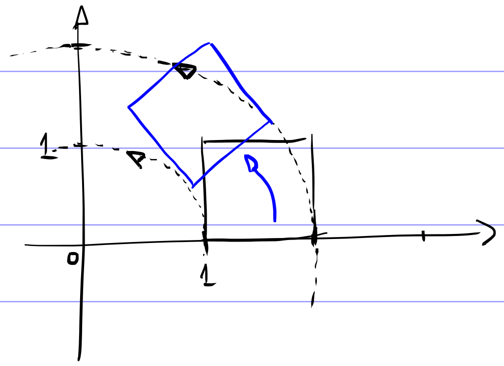
$\rightarrow$ Solution for $Q(t)$, $P(t)$ with these initial conditions :

$$\begin{cases} Q(t) = Q_0 \cos(\omega t) + P_0 \sin(\omega t) \\ P(t) = -Q_0 \sin(\omega t) + P_0 \cos(\omega t) \end{cases} \qquad (*)$$

c) A general solution $\begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ passing through point $\begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$ at $t=0$ can be written as (see $(*)$)

$$\begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{\text{rotation matrix}} \begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

→ Time evolution is described in phase space (Q, P) as a rotation of angle ωt.



Rotations preserve the surface element and the surface of the time-evolved region (blue) is the same as for the region at $t=0$. This is in line with Liouville's theorem, which states that the Hamiltonian evolution preserves phase space volume.

Liouville's theorem also applies if H is time-dependent, so if $\omega = \omega(t)$ is not constant, then the time evolution would still preserve the region's phase space volume.

Aufgabe 2: Kanonische Transformationen

Wir betrachten ein System beschrieben durch die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{q^2}. \tag{3}$$

Für Konstanten $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, A \neq 0$ und γ führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:

$$q = P^\alpha, \qquad p = AQ^\beta P^\gamma. \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$. Drücken sie diese durch $Q, P, \dot{Q}$ und $\dot{P}$ aus und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Q und P.

Lösung: Die kanonischen Bewegungsgleichungen lassen sich leicht ablesen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^4, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2p^2q^3 + q^{-3} \tag{s.1}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\alpha\dot{P}P^{\alpha-1} = \dot{q} = AQ^\beta P^{\gamma+4\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{P} = \frac{A}{\alpha}Q^\beta P^{\gamma+3\alpha+1}. \tag{s.2}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$A(\beta Q^{\beta-1}\dot{Q}P^\gamma + \gamma Q^\beta P^{\gamma-1}\dot{P}) = \dot{p} = -2A^2Q^{2\beta}P^{2\gamma+3\alpha} + P^{-3\alpha}. \tag{s.3}$$

Indem wir (??) für $\dot{P}$ einsetzen erhalten wir nach umstellen

$$\dot{Q} = -\frac{A}{\beta}(2 + \frac{\gamma}{\alpha})Q^{\beta+1}P^{\gamma+3\alpha} + \frac{1}{\beta A}P^{-\gamma-3\alpha}Q^{-\beta+1}. \tag{s.4}$$

(b) Betrachten Sie den neuen Hamiltonian $H'(Q,P) = H(q(Q,P), p(Q,P))$ und bestimmen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für Q und P.

Lösung: Die transformierte Hamiltonfunktion ist

$$H'(Q,P) = \frac{1}{2}A^2Q^{2\beta}P^{2\gamma+4\alpha} + \frac{1}{2}P^{-2\alpha}. \tag{s.5}$$

Damit ergeben sich die kanonischen Bewegungsgleichungen zu:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}A^2Q^{2\beta}(2\gamma + 4\alpha)P^{2\gamma+4\alpha-1} - \alpha P^{-2\alpha-1} \qquad \dot{P} = -\beta A^2Q^{2\beta-1}P^{2\gamma+4\alpha}. \tag{s.6}$$

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b). Was muss für α, β, γ, A gelten, damit die Bewegungsgleichungen erhalten bleiben, d.h. damit die Koordinatentransformation kanonisch ist.

Lösung: Offenbar ergeben die kanonischen Bewegungsgleichungen im Allgemeinen veränderte (falsche) Bewegungsgleichungen für Q und P. Nur für spezielle Werte von α, β, γ ist die Transformation kanonisch. Insbesondere folgt aus den beiden Bewegungsgleichugen für P

$$\dot{P} = \frac{A}{\alpha}Q^\beta P^{\gamma+3\alpha+1} \overset{!}{=} -\beta A^2Q^{2\beta-1}P^{2\gamma+4\alpha} \tag{s.7}$$

für alle Werte von Q und P. Das kann nur gelten, wenn die Vorfaktoren und die Exponenten übereinstimmen, d.h.

$$\beta = 2\beta - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = 1 \tag{s.8}$$

$$\gamma + 3\alpha + 1 = 2\gamma + 4\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = 1 - \alpha \tag{s.9}$$

$$\frac{A}{\alpha} = -\beta = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\alpha. \tag{s.10}$$

Es sollte jetzt noch überprüft werden, dass mit diesen Relationen auch die Bewegungsgleichungen für P übereinstimmen.

Insgesamt haben wir die folgende kanonische Transformation für eine konstante $\alpha \neq 0$.

$$q = P^{\alpha}, \qquad p = -\frac{1}{\alpha} Q P^{1-\alpha}. \tag{s.11}$$

(d) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ für die Koordinatentransformation.

Lösung: Die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ muss per Definition die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p, \qquad \frac{\partial F}{\partial Q} = -P \tag{s.12}$$

erfüllen. Die zweite ergibt direkt:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -q^{\frac{1}{\alpha}} \implies F = -q^{\frac{1}{\alpha}} Q + C(q). \tag{s.13}$$

In die erste Gleichung eingesetzt ergibt das zusammen mit (??).

$$-\frac{1}{\alpha} Q + C'(q) = -\frac{1}{\alpha} Q P^{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha} Q q^{\frac{1}{\alpha}-1} \implies C'(q) = 0. \tag{s.14}$$

Daher

$$F = -q^{\frac{1}{\alpha}} Q + C \tag{s.15}$$

mit einer frei wählbaren Konstante C.

(e) Berechnen Sie die Poissonklammer $\{Q, P\}_{q,p}$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Bedingungen aus Aufgabe c).

Lösung: Stellen wir die Koordinatentransormationen um erhalten wir

$$P = q^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad Q = A^{-\frac{1}{\beta}} p^{\frac{1}{\beta}} q^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}}. \tag{s.16}$$

Damit erhalten wir

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{1}{\beta\alpha} A^{-\frac{1}{\beta}} p^{\frac{1}{\beta}-1} q^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}-1}. \tag{s.17}$$

Die Koordinatentransformation ist genau dann eine kanonische Transformation wenn $\{Q, P\} = 1$ ist. Daraus lassen sich die gleichen Bedingungen wie in Aufgabe c) ableiten.