Freie Universität Berlin
Analytische Mechanik
Sommer-Semester 2022

Übungsblatt 2
Vektorrechnung und Arbeit

Abgabe bis: 6.05.2022 um 12:00

Aufgabe 1: Rechnungen mit Gradient, Divergenz, und Rotation

Der Nabla-Operator ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Damit definieren sich der *Gradient* einer differenzierbarer Funktion f sowie die *Divergenz* und die *Rotation* eines differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ wie folgt

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} ; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

(a) Ein Endpunkt einer massenlosen Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge $\ell = 0$ ist an dem festen Punkt $(0, 0, 0)$ befestigt. Der andere Endpunkt kann sich frei in alle Richtungen bewegen, und daran wird eine Punktmasse mit Masse m befestigt. Geben Sie das Potential $V(\boldsymbol{r})$ für die Punktmasse an. Berechnen Sie die Kraft, welche auf die Punktmasse wirkt, wenn sich diese an einem Punkt $\boldsymbol{r}$ befindet, indem Sie den Gradienten des oben gefundenen Potentials berechnen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der bekannten Formel für Federkräfte.

Lösung: The potential energy of a spring is given by $\frac{1}{2}k\, x^2$, where x is the displacement from the rest length of the spring. The potential energy does not depend on the orientation so we find that

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{r}|^2 . \tag{2}$$

We now compute the gradient of the potential. Writing the components of $\boldsymbol{r}$ as $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, we find:

$$\frac{\partial}{\partial x}V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\, k\, \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = k\, r_x . \tag{3}$$

Similarly, $\frac{\partial}{\partial y}V(\boldsymbol{r}) = r_y$ and $\frac{\partial}{\partial z}V(\boldsymbol{r}) = r_z$. Then the force on the point mass is given by

$$F(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad} V(\boldsymbol{r}) = -k\, \boldsymbol{r} , \tag{4}$$

which is the well-known expression for the force exerted by a spring.

(b) Auf einen Planeten der Masse m wirkt die Gravitationskraft eines Sterns der Masse M. Es gilt $M \gg m$ und es darf angenommen werden, dass der Stern fest am Punkt $(0,0,0)$ bleibt. Geben Sie das Potenzial des Planeten an. Berechnen Sie die Kraft, die auf den Planeten wirkt, indem Sie den Gradienten des Potentials ausrechnen und vergleichen Sie diese mit der bekannten Formel für die Gravitationskräfte zwischen zwei Massen.

Lösung: The gravitational potential energy between two masses m and M at positions $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{R}$ is given by

$$V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = -G_N \frac{mM}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}|} , \tag{5}$$

where G_N is Newton's gravitational constant. Here, because $M \gg m$ we may set $\boldsymbol{R} = 0$, so we have

$$V(\boldsymbol{r}) = -G_N \frac{mM}{|\boldsymbol{r}|} . \tag{6}$$

Let us now compute the gradient of $V(\boldsymbol{r})$. We have

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} (2x) = -\frac{x}{|r|^3} . \tag{7}$$

Similarly, $\frac{\partial}{\partial y}(1/|\boldsymbol{r}|) = -y/|r|^3$ and $\frac{\partial}{\partial y}(1/|\boldsymbol{r}|) = -z/|r|^3$. Thus

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} \hat{\boldsymbol{r}} , \tag{8}$$

where $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ is the unit vector pointing in the direction of $\boldsymbol{r}$.

For the gravitational force on the planet we find

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}) = G_N \, mM \, \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -G_N \frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^2} \hat{\boldsymbol{r}} , \tag{9}$$

which is the well-known expression for the gravitational force a massive body exerts on another massive body.

(c) Sei $f(\boldsymbol{r})$ ein zweifach differenzierbares Skalarfeld. Berechnen Sie $\nabla \times (\nabla f)$.

Lösung: We use the shorthands $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ and $\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$. We find

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f \\ \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f \\ \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \end{pmatrix} = 0 , \tag{10}$$

noting that the derivatives commute.

(d) Sei $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ein zweifach differenzierbares Vektorfeld. Berechnen Sie $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$.

Lösung: Let's go:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \partial_y A_z - \partial_x \partial_z A_y + \partial_y \partial_z A_x - \partial_y \partial_x A_z + \partial_z \partial_x A_y - \partial_z \partial_y A_x \\ &= 0 , \end{aligned} \tag{11}$$

noting that the derivatives commute.

(e) Sei $f(\rho, \varphi, z)$ ein Skalarfeld gegeben in den Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Berechnen Sie die Darstellung von ∇f in diesen Koordinaten.

Hinweis. (Eine Methode) Betrachten Sie eine Approximation erster Ordnung von f am Punkt $\boldsymbol{r}$ in Richtung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, zuerst in den Argumenten ρ, φ, z von f und dann in kartesischen Koordinaten, und vergleichen diese.

Lösung: There are two methods.

Method #1: Direct computation. The inverse coordinate transformation is given by

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0\ , \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0 \text{ and } y \geqslant 0\ , \\ -\pi + \arctan(y/x) & x < 0 \text{ and } y < 0\ , \\ \pm\pi/2 & x = 0 \text{ and } \operatorname{sign}(y) = \pm 1\ . \end{cases} \tag{12}$$

(Here, we conventionally chose $\varphi \in (-\pi, \pi]$. The discontinuity on the half-line $x = 0, y < 0$ only arises because of this convention and does not represent any physical discontinuity. If we need to compute anything on this half-line we can simply place the discontinuity elsewhere by choosing a different convention for the range of φ.)

Using $(d/dq)\arctan(q) = 1/(1+q^2)$, we find (for (x, y) not on the chosen discontinuity of φ),

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2x = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi\ ; & \frac{\partial\rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho} = \sin\varphi\ ; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{(-y/x^2)}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}\ ; & \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{(1/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\ . \end{aligned} \tag{13}$$

We denote by $\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z$ the basis vectors representing the Cartesian x, y, z directions and by $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ the orthonormal vectors pointing along the ρ, φ cylindrical coordinates. (Note that $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ depend on the position.) The transformation of these basis vectors can be identified by a simple drawing. Alternatively, we can compute them by considering infinitesimal shifts of the coordinates: If for instance we move a point infinitesimally along the $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$ direction, i.e., $\rho \to \rho' = \rho + d\rho$, then we find $x \to x' = (\rho + d\rho)\cos\varphi = x + \cos(\varphi)d\rho$ and $y \to y' = (\rho + d\rho)\sin\varphi = y + \sin(\varphi)\,d\rho$. Then

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\ . \tag{14}$$

Similarly, if we shift $\varphi \to \varphi' = \varphi + d\varphi$ then we find $x \to x' = \rho\cos(\varphi + d\varphi) \approx x + (-\rho\sin(\varphi)\,d\varphi)$ if we ignore terms of order $O(d\varphi^2)$; we also have $y \to y' = \rho\sin(\varphi + d\varphi) \approx y + \rho\cos(\varphi)\,d\varphi$. Then, accounting for normalization,

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\sin(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\ . \tag{15}$$

Inverting the rotation that relates $\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y$ and $\hat{\boldsymbol{e}}_\rho, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ gives us

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x \\ \hat{\boldsymbol{e}}_y\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x \\ \hat{\boldsymbol{e}}_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\end{pmatrix}\ .$$

Now we can combine the above to compute the representation of the gradient operation in cylindrical coordinates. Starting from the simple Cartesian representation, we find:

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= \Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big)\big(\cos(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \sin(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\big) \\
&\quad + \Big(\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big)\big(\sin(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos(\varphi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= \Big[\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi\Big)\frac{\partial f}{\partial \rho} + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\varphi\Big)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big]\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \\
&\quad + \Big[\Big(-\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi\Big)\frac{\partial f}{\partial \rho} + \Big(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\varphi\Big)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\Big]\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \ .
\end{aligned} \tag{16}
$$

Using the values we computed earlier for $\partial\rho/\partial x$, $\partial\rho/\partial y$, $\partial\varphi/\partial x$, and $\partial\varphi/\partial y$, we find

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \ ; \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\varphi = \frac{1}{\rho}\Big(-\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\Big) = 0 \ ; \\
-&\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi = -\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0 \ ; \\
-&\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\varphi = \frac{1}{\rho}\Big(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\Big) = \frac{1}{\rho} \ .
\end{aligned}
$$

Then

$$
(16) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \ . \tag{17}
$$

Method #2: Sneaky. Suppose that we consider an infinitesimal deviation of a position vector $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$. In Cartesian coordinates we have $d\boldsymbol{r} = dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\hat{\boldsymbol{e}}_y + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z$, where $\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z$ are unit vectors pointing along each coordinate and dx, dy, dz denote infinitesimal displacements in each of the coordinates. We also determined in Method #1 that $\hat{\boldsymbol{e}}_x = \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ and $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$. Also, the infinitesimal shifts in the coordinates $d\rho, d\varphi$ translate into shifts dx, dy as follows. We have $x \to x + dx = (\rho + d\rho)\cos(\varphi + d\varphi) \approx x + \cos(\varphi)d\rho + \rho\sin(\varphi)d\varphi$, ignoring second-order terms, and thus $dx = \cos(\varphi)d\rho - \rho\sin(\varphi)d\varphi$. Similarly, $dy = \sin(\varphi)d\rho + \rho\cos(\varphi)d\varphi$. Therefore,

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \big[\cos(\varphi)d\rho - \rho\sin(\varphi)d\varphi\big]\big[\cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\big] \\
&\quad + \big[\sin(\varphi)d\rho + \rho\cos(\varphi)d\varphi\big]\big[\sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\big] + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
&= d\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z \ .
\end{aligned} \tag{18}
$$

Now, an important property of the gradient is its role in the Taylor expansion of a multivariate function. Namely, to first order in a displacement $d\boldsymbol{r}$ of the argument $\boldsymbol{r}$ of $f(\boldsymbol{r})$, we have

$$
f(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{r}) + d\boldsymbol{r} \cdot \nabla f\,(\boldsymbol{r}) \ . \tag{19}
$$

At the same time, we know that we can also expand f in this way in terms of its arguments (ρ, φ, z), ignoring second-order terms:

$$
f(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{r}) + d\rho\,\frac{\partial f}{\partial \rho} + d\varphi\,\frac{\partial f}{\partial \varphi} + dz\,\frac{\partial f}{\partial z} \ . \tag{20}
$$

Let $\alpha_\rho, \alpha_\varphi, \alpha_z$ be coefficients such that $\nabla f = \alpha_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \alpha_\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \alpha_z \hat{\boldsymbol{e}}_z$. Then

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} \cdot \nabla f &= \left[d\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \rho d\varphi\, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + dz \hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \cdot \left[\alpha_\rho \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \alpha_\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \alpha_z \hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \\ &= \alpha_\rho d\rho + \rho \alpha_\varphi d\varphi + \alpha_z dz\ . \end{aligned} \tag{21}$$

Equating the first-order terms in (19) and (20) we find $\alpha_\rho = \partial f / \partial r$, $\alpha_\varphi = \rho^{-1} \partial f / \partial \varphi$, and $\alpha_z = \partial f / \partial z$, which gives the required expression for ∇f.

Aufgabe 2: In einem Kraftfeld

Wir betrachten die Bewegung einer Punktmasse im $\mathbb{R}^3$. Auf die Masse wirkt ein Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\lambda r_2, \lambda r_1, \mu)^T$, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten sind und $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{F}$ eine konservative Kraft ist.

Lösung: *Recap:* Let $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \supset V \to \mathbb{R}^3$ be a differentiable vector field. Recall that the definition of the *work in a force field $\boldsymbol{F}$ along a path K* reads

$$W = \int_K F(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{22}$$

In the lecture, we defined a force field to be conservative if its work is *only depends on the start and end point of the path.*

Equivallently, $\boldsymbol{F}$ is conservative if and only if the work over every closed path S vanishes, i.e. $\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.

As long as the domain of F is simply connected, the integral characterisation for conservative forces can be translated by means of Stokes' theorem to the condition of vanishing curl

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = 0. \tag{23}$$

The Poincaré lemma (for 1-forms) implies that a vector field $\boldsymbol{F}$ with vanishing curl (on an open, star shaped domain) can be expressed as the gradient of a function $U : V \to \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{24}$$

For a conservative force field U is called the *potential energy*.

Now to the excercise: The most handy criterion for checking that a force field is conservative is the vanishing of its rotation. Indeed, we find

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda - \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{25}$$

Thus, $\boldsymbol{F}$ is conservative.

(b) Die Punktmasse soll auf einer Geraden vom Punkt $\boldsymbol{q}_0 = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ verschoben werden. Berechnen Sie die dazu aufzuwendende Arbeit.

Lösung: We parametrise the path of the particle as $\boldsymbol{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ such that $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{q}_0$ and $\boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{q}$. We have $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$. Substituting our parametrisation into the defintion of the work yields

$$\begin{aligned} W &= \int_{q_0}^{q} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}t) \cdot \boldsymbol{q}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} \lambda q_2 t & \lambda q_1 t & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 (2\lambda q_1 q_2 t + \mu q_3) \mathrm{d}t = \lambda q_1 q_2 + \mu q_3 \end{aligned}$$

(c) Geben Sie das Potential der Kraft $\boldsymbol{F}$ an.

Lösung: We know that for a conservative force field the work is equal to the negative change in potential energy. Thus, we conclude from the previous excercise part that

$$U(\boldsymbol{r}) = -\lambda r_1 r_2 - \mu r_3. \tag{26}$$

We can easily convince ourself that as expected $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$.

(d) Wir verschieben nun die Punktmasse längs der Koordinatenachsen nacheinander von $\boldsymbol{q}_0$ zu $\boldsymbol{q}$, d.h. entlang des Weges $(0,0,0)^T \to (q_1,0,0)^T \to (q_1,q_2,0)^T \to (q_1,q_2,q_3)^T$. Wie ändert sich die dazu aufzubringende Arbeit im Vergleich zu Aufgabenteil (b)?

Lösung: Since the force field is conservative the work is independent of the the path. Therefore, the work is unchanged compared to excercise part (b).

Aufgabe 3: Newton vs. Galilei vs. Aristoteles

Die moderne Formulierung von Bewegungsgleichungen beginnt mit Newton. Gedanken über freien Fall haben sich Menschen allerdings schon viel früher gemacht. Z.B. kam der griechische Philosoph Aristoteles zu dem naheliegenden Prinzip das schwere Objekte schneller fallen als leichte. Dem widersprach der Astronom Galilei und erdachte das folgende Gedankenexperiment:

Betrachte zwei Objekte A und B, wobei A schwerer ist als B. Kleben wir nun beide Objekte zusammen, so müsste B den Fall von A bremsen, gleichzeitig is das kombinierte Objekt aber schwerer als B und müsste nach unserer Annahme schneller fallen, was zum Widerspruch führt.

Welche versteckte Annahme macht Galilei in seiner Argumentation? Was macht Gravitation so besonders?

Lösung: Die wesentliche versteckte Annahme ist die Gleichheit von träger Masse und schwerer Masse, also das sogenannte *Äquivalenzprinzip*. Diese Annahme wird auch von Newton schon impizit gemacht, sie ist allerdings keineswegs so unschuldig wie es für Newton den Anschein gehabt haben mag. Tatsächlich ist die Gravitation die einzige Kraft, in der Ladung (schwere Masse) an die träge Masse gekoppelt ist. Ein Argument von der Art Galileis würde z.B. nicht für die elektrische Kraft funktionieren, obwohl diese eine sehr ähnliche Form hat. Der Grund ist, dass die elektrische Ladung eben unabhängig von der trägen Masse ist. Diese Eigenschaft ist so besonders, dass eine leicht verstärkte Variante des Äquivalenzprinzips Albert Einstein zu der Idee brachten, dass Gravitation überhaupt keine Kraft sein kann, sondern eine geometrische Erklärung benötigt. Damit legt das Äquivalenzprinzip den Grundstein für die allgemeine Relativitätstheorie. Heute noch wird das Äquivalenzprinzip mit großer Genauigkeit getestet in der Hoffnung leichte Verletzungen dieses festzustellen. Eine solche Verletzung scheint notwendig für viele Ansätze zur Quantisierung von Gravitation, aber das Äquivalenzprinzip ist hartnäckig und hält bisher allen Tests stand.